Analysis-CAS : Papierflieger

1 Papierflieger - Aufgaben

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_r mit

$$f_r(x) = -\frac{1}{r} \cdot x^2 + \frac{4}{r} \cdot x + 2 \quad \text{und} \quad r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

1. *Kurvenuntersuchung*

   (a) Skizzieren Sie in einem Koordinatensystem den Graphen von f_6 über dem Intervall $[-3; 7]$.

   (2 P)

   (b) Betrachtet wird der folgende Term:

   $$\int_{-2}^{0} f_6(x)dx + 4 \cdot 2 + \int_{4}^{6} f_6(x)dx$$

   Markieren Sie in ihrer Skizze zu Teilaufgabe 1(a) ein Flächenstück, dessen Inhalt mit dem gegebenen Term berechnet werden kann, und ordnen Sie jedem Summanden des Terms einen passenden Teil des Flächenstücks zu. Geben Sie den Inhalt des Flächenstücks an.

   (4 P)

   (c) Zeigen Sie, dass jede Funktion der Schar an der Stelle 2 ein Extremum hat. Geben Sie in Abhängigkeit von r an, ob es sich um ein Minimum oder ein Maximum handelt, und nennen Sie den zugehörigen Funktionswert.

   (4 P)

   (d) Ermitteln Sie die Anzahl der Nullstellen von f_r in Abhängigkeit von r.

   (4 P)

Lösung für TI-Nspire CX   Lösung für Classpad

Hinweis:
Mit gleichzeitigem Drücken von $\boxed{Strg}$ und Lösung bzw. $\boxed{Ctrl}$ und Lösung wird die Lösung in einem neuen Tab angezeigt.

2. *Flächen*

   Für $r > -2$ und $r \neq 0$ sind

   $$A_r(2-\sqrt{4+2r}|0), \quad B_r(2+\sqrt{4+2r}|0) \quad \text{und} \quad C(4|2)$$

   Punkte des Graphen von f_r.

   (a) Es soll untersucht werden, für welche Werte von r das Dreieck A_rB_rC einen rechten Winkel bei C hat.
   Jeder der beiden folgenden Ansätze liefert die gesuchten Werte von r :

   (1) $\begin{pmatrix} -\sqrt{4+2r}-2 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \sqrt{4+2r}-2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$

   (2) $\dfrac{2}{2+\sqrt{4+2r}} \cdot \dfrac{2}{2-\sqrt{4+2r}} = -1$

   Erläutern Sie die beiden Ansätze und geben Sie einen entsprechenden Wert für r an.

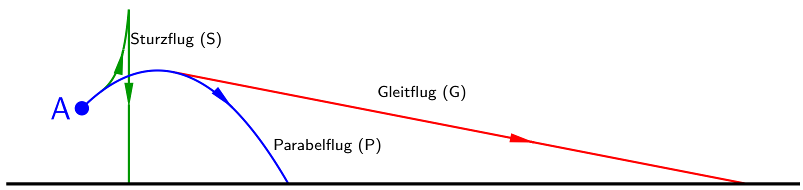
   (5 P)

   (b) Der Graph der Funktion f_r schließt gemeinsam mit der x-Achse eine Fläche F_r ein. Ermitteln Sie einen Wert für r, für den der Flächeninhalt der Fläche F_r viermal so groß ist wie der Flächeninhalt des Dreiecks A_rB_rC.

   (3 P)

   Lösung für TI-Nspire CX   Lösung für Classpad

Im Folgenden sollen für den Flug von Papierfliegern drei mögliche Typen von Flugkurven betrachtet werden. Diese sind in der Abbildung schematisch dargestellt.



Wird die Größe der betrachteten Papierflieger vernachlässigt, können die Flugkurven bei Verwendung eines Koordinatensystems, dessen x-Achse entlang des horizontalen Bodens und dessen y-Achse durch den Abwurfpunkt A verläuft, modellhaft mithilfe von Funktionen beschrieben werden. Der x-Wert soll im Folgenden der horizontalen Entfernung des Papierfliegers vom Abwurfpunkt A entsprechen, der zugehörige Funktionswert der Flughöhe (jeweils in Metern).

3. *Parabelflug*

   Ein Papierflieger bewegt sich entlang einer Flugkurve vom Typ P.
   Diese kann für $x \geq 0$ mithilfe der Funktion f_4 beschrieben werden.
   Weisen Sie nach, dass die Flugweite etwa $5{,}46$ m beträgt.

   (2 P)

   Lösung für TI-Nspire CX   Lösung für Classpad

4. *Sturzflug*

Im Folgenden wird ein Papierflieger betrachtet, der sich entlang einer Flugkurve des Typs S bewegt. Diese kann im ersten Teil mit Hilfe der Funktion f_4 beschrieben werden, im zweiten Teil ab einer horizontalen Entfernung von $0,5$ m vom Abwurfpunkt mithilfe einer Funktion s mit

$$s(x) = \frac{a}{x - 1.5} + b \quad \text{und} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Dabei weist die Flugkurve bis zum höchsten Punkt keinen Knick auf. Der Papierflieger steigt, bis er einen Steigungswinkel mit einer Größe von $85°$ erreicht und stürzt dann vertikal ab.

(a) Bestimmen Sie die Werte a und b.

(3 P)

Im Folgenden ist $a = -0{,}75$ und $b = 1{,}6875$.

(b) Berechnen Sie die horizontale Entfernung e vom Abwurfpunkt, in der der Papierflieger den Steigungswinkel mit einer Größe $85°$ erreicht.
[zur Kontrolle: $e \approx 1{,}24$]

(3 P)

(c) Ist ein Kurvenstück Graph einer in $[x_0; x_1]$ mit $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ definierten Funktion h mit erster Ableitungsfunktion h', so gilt für die Länge L des Kurvenstücks:

$$L = \int_{x_0}^{x_1} = \sqrt{1 + \left(h'(x)\right)^2 dx}$$

Ermitteln Sie die Länge der beschriebenen Flugkurve vom Typ S.

(5 P)

Lösung für TI-Nspire CX   Lösung für Classpad

5. *Flugkurve G*

Die größten Flugweiten erzielen Papierflieger mit der Flugkurve des Typs G. Eine solche Flugkurve lässt sich im ersten Teil mithilfe der Funktion f_4 beschreiben. Ab einem bestimmten Punkt kann der weitere Verlauf der Flugkurve bis zum Boden durch eine Gerade dargestellt werden. Der Übergang vom ersten zum zweiten Teil der Flugkurve erfolgt ohne Knick. Die Flugweite beträgt $17{,}6$ m.
Ermitteln Sie, in welcher Höhe der gekrümmte Teil der Flugkurve in den geradlinigen übergeht.

(5 P)

Lösung für TI-Nspire CX   Lösung für Classpad